



## LECȚIA 26

### PROBLEME DE SINTEZĂ

ANTON IOANA, PLUGARIU ANDREI

1. Demonstrați că dacă  $\overline{abcd}$  este divizibil cu 37, atunci și  $\overline{dbca}$  este divizibil cu 37.
2. În câte moduri se poate scrie 2013 ca sumă de numere consecutive?
3. Se consideră numerele naturale  $x, y, z$ . Împărțind  $x$  la  $y$  obținem câtul 4 și restul 3. Împărțind  $y$  la  $z$  câtul 5 și restul 4.
  - a) Demonstrați că  $x \geq 100$ .
  - b) Determinați  $x, y, z$ , știind că  $x + y + z = 153$ .
4. Verificați dacă există numere naturale  $\overline{abc}$  divizibile cu 11, astfel încât  $a > b > c$ .
5. Se consideră șirul de numere naturale  $1+2, 2+4, 4+5, 5+7, 7+8, \dots$ 
  - a) Verificați dacă 2020 se află în șir.
  - b) Determinați termenul de pe poziția 100 din șirul dat.
6. Determinați numerele naturale  $\overline{ab}$  cu proprietatea că  $\overline{aa} \cdot (b \cdot b - a) = 2013$ .
7. Bananele dintr-o cutie sunt puse în pungi pentru a fi comercializate. Dacă se pun câte 8 banane într-o pungă, rămân 5 banane, dacă se pun câte 10 banane într-o pungă, rămân 3 banane, iar dacă se pun câte 18 banane într-o pungă, rămân 15 banane. Determinați numărul maxim de banane din cutie, știind că acesta nu depășește 2020.
8. Demonstrați că există o infinitate de perechi de numere naturale  $(x, y)$  astfel încât  $3x - 2y + 1 = 0$ .
9. Se consideră șirul de numere naturale  $1, 1, 3, 4, 6, 9, 10, 16, 15, 25, \dots$ 
  - a) Completați șirul cu încă 3 termeni.
  - b) Verificați dacă 2016 se află în șir (în caz afirmativ precizați poziția).
10. Dacă ordonăm crescător șirul numerelor naturale de 2020 de cifre cu suma cifrelor 2020, determinați al 25-lea termen.
11. Determinați numerele naturale de trei cifre  $\overline{abc}$  care înmulțite cu 4 dau un număr de trei cifre consecutive.
12. Se consideră șirul de numere naturale  $0, 1, 4, 13, 32, 65, 116, 189, \dots$ . Scrieți următorii trei termeni din șir.
13. Dacă  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2020}$  sunt numere naturale, iar  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{2020}$  reprezintă aceleași numere naturale, dar scrise în altă ordine, demonstrați că  $p = (a_0 + b_0)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_{2020} + b_{2020})$  este număr par.
14. Un număr natural  $A$  îl numim super-3 dacă suma cifrelor sale este de trei ori mai mare decât suma cifrelor lui  $A+1$ . Determinați toate numerele super-3 cu cel mult 4 cifre.
15. Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 9 dau câtul  $q$  și restul  $r$ , iar împărțite la 17 dau câtul  $r$  și restul  $q$ .
16. Determinați toate valorile naturale ale lui  $n$  pentru care  $n \cdot n - n + 2$  se împarte doar la două numere.
17. Se consideră zece numere naturale nenule, distincte, mai mici decât 89. Demonstrați că se pot alege trei dintre acestea  $a, b, c$ , astfel încât  $a < b < c$  și  $a + b > c$ .
18. Dacă numerele  $x, y$  sunt naturale și  $4x + 7y = 2013$ , demonstrați că  $287 < x + y < 504$ .
19. Scrieți numărul  $2021 \cdot n$  ca sumă de 2021 numere naturale consecutive, unde  $n \geq 1010$ .
20. Fie șirul de numere naturale  $3, 8, 13, 18, 23, \dots, 98, 103$ . Dacă  $S$  este suma tuturor numerelor din șir care nu sunt divizibile cu 3, demonstrați că  $S$  este divizibilă cu 3.