



LECȚIA 23

PROBLEME DE SINTEZĂ

MIHAELA BUCĂȚARU, CRISTINA CREȚU

1. Pentru un număr natural n , vom nota cu $s(n)$ suma cifrelor sale și cu $u(n)$ ultima sa cifră. Determinați numerele n dacă $n + s(n) + u(n) = 2019$.
2. Un număr natural n are 5 cifre. Știind că suma cifrelor lui n este egală cu 44, ce valori poate lua suma cifrelor numărului $n+1$?
3. Să se afle trei numere naturale, știind că împărțind primul număr la dublul celui de-al doilea și apoi pe cel de-al doilea la jumătatea celui de-al treilea număr, se obține de fiecare dată câtul 5 și restul 11, iar diferența dintre primul și al treilea număr este mai mică decât 700.
4. În pătratul alăturat, suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană și de pe fiecare dintre cele două diagonale este aceeași. Să se determine numerele a, b, c, d, e .

7	a	13
14	b	2
c	d	e

5. Aflați suma resturilor obținute prin împărțirea la 13 a 333 de numere naturale consecutive, știind că dacă împărțim pe cel mai mic dintre ele la 13 obținem restul 4.
6. Un număr natural n , dacă e împărțit la 7, dă restul 5, dacă e împărțit la 8, dă restul 7, și dacă e împărțit la 4, dă restul 3. Aflați restul împărțirii lui n la 56.
7. Într-un sac sunt 1114 nuci. Două veverițe se joacă respectând următoarea regulă: fiecare ia, pe rând, un număr de nuci cel puțin egal cu 5 și cel mult egal cu 10. Pierde cea care nu mai poate lua nuci. Care dintre ele va câștiga indiferent de mișcările adversarei?
8. Un cub mare din lemn este construit din 27 de cubulețe identice. Am colorat apoi cinci fețe ale cubului cu vopsea neagră.
 - a) Câte cubulețe au exact trei fețe negre?
 - b) Dar exact două fețe negre?
9. Se consideră șirul de numere 1,2,3,10,11,12,13,20,21,22,23,.....
 - a) Să se scrie următorii patru termeni ai șirului.
 - b) Câte numere de patru cifre conține șirul?
 - c) Care este al 250-lea termen din acest șir?
10. Pe un rând sunt așezați mai mulți băieți și fete, în ordinea înălțimii. Între oricare doi băieți așezați consecutiv, se află trei fete, iar oricare grup format din trei fete așezate consecutiv, este încadrat de doi băieți. Dacă cel mai scund elev în grup este băiat, iar numărul fetelor este cu 46 mai mare decât numărul băieților, aflați numărul total al elevilor așezați în rând.
11. Într-un joc video, Alex trebuie să tragă în baloane. Dacă nimerește un balon, acela dispăre, iar dacă ratează, mai apare un balon. Jocul se încheie când dispar toate baloanele. La început erau 15 baloane, iar jocul s-a terminat după 39 de încercări. Câte baloane a nimerit Alex?
12. Un număr se numește *deosebit* dacă este format din patru cifre distincte și suma oricăror două cifre alăturate este impară.
 - a) Care este diferența dintre cel mai mare și cel mai mic număr *deosebit*?
 - b) Câte numere *deosebite* există?
13. Într-o clasă, fiecare băiat este prieten cu cinci fete și fiecare fată este prietenă cu doi băieți. Dacă în clasă sunt 18 bănci (de câte două locuri) și 29 de elevi sunt pasionați de istorie, câte fete și câți băieți sunt în clasă?



-
- 14.** Albă ca Zăpada și cei 7 pitici au împreună 115 ani. Vârstele piticilor sunt numere pare consecutive. La un an de la nașterea celui mai mic pitic, Albă ca Zăpada avea dublul vârstei celui de-al treilea pitic (antepenultimul născut). Să se afle ce vârstă are fiecare personaj acum.
- 15.** Patru colegi din clasa a IV-a, Gigel, Ada, Victor și Andrei, pleacă în weekend în drumeție. Pe traseul ales, la un moment dat, ei se află la intrarea într-un tunel întunecos cu lungimea de 200 m. Tunelul, fiind îngust, poate fi traversat simultan doar de cel mult doi copii și dispun de o singură torță, care arde complet în 30 de minute. Se mai știe că pentru a traversa tunelul, lui Victor îi trebuie 2 minute, lui Andrei 4 minute, lui Gigel 8 minute, iar Adei 16 minute. În aceste condiții, cum organizează trecerea cei patru copii pentru a traversa tunelul și ce distanță parcurge fiecare copil?



TEMA 23

1. Aflați numerele naturale n din egalitatea $n - s(n) = 2007$, $s(n)$ reprezentând suma cifrelor numărului n .
2. Câte numere de patru cifre au suma cifrelor 34?
3. Suma dintre câtul și restul împărțirii a două numere naturale este 53, iar restul este cu 1 mai mare decât triplul câtului. Aflați deîmpărțitul, știind că el este număr natural cuprins între 540 și 590.
4. În pătratul alăturat, suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană și de pe fiecare dintre cele două diagonale este aceeași. Să se determine numerele a, b, c, d, e .

28	16	a
48	30	b
c	d	e

5. Se consideră 144 numere naturale consecutive în ordine crescătoare. Al doilea număr se împarte exact la 7. Ce rest dă cel mai mare dintre aceste numere la împărțirea cu 7?
6. Un număr natural n , dacă e împărțit la 9, dă restul 7, și dacă e împărțit la 5, dă restul 2. Ce rest obținem dacă împărțim numărul n la 45?
7. Într-o grămăjoară se află 2006 pietricele. Doi elevi se joacă respectând următoarea regulă: fiecare ia, pe rând, un număr de pietricele cel puțin egal cu 6 și cel mult egal cu 17. Pierde cel care nu mai poate lua pietricele. Care dintre ei va câștiga indiferent de mișcările adversarului?
8. Un teren în formă de dreptunghi este împrejmuit cu un gard care are stâlpii din 4 m în 4 m. Aflați câți stâlpi au fost necesari, știind că dacă se mărește lățimea dreptunghiului cu 120 m, se obține un pătrat, iar dacă se micșorează lățimea cu 120 m, se obține un dreptunghi cu lățimea de două ori mai mică decât lungimea.
9. Se dă șirul de numere 1,3,7,9,11,13,17,19,31,33,...
 - a) Să se scrie următorii trei termeni din șir.
 - b) Să se determine numărul termenilor șirului care au cel mult 5 cifre.
 - c) Care este numărul de pe locul 1363 din șir?
10. Un rând de elevi este organizat astfel: la capete, câte un băiat, între oricare doi băieți consecutivi sunt așezate două fete, iar numărul fetelor este cu 9 mai mare decât numărul băieților. Câți băieți sunt în șir?
11. Am 9 bucăți de hârtie. Pe unele dintre ele le tai în câte trei bucăți. În total am acum 25 de bucăți de hârtie. Câte bucăți de hârtie au fost tăiate?
12. Un număr se numește *frumos* dacă are cifrele scrise în ordinea: cifră pară, cifră impară, cifră pară, cifră impară etc.
 - a) Dați exemplul de număr *frumos* cu trei cifre.
 - b) Câte numere *frumoase* de trei cifre sunt?
 - c) Aflați diferența dintre cel mai mare număr *frumos* de cinci cifre distincte și cel mai mic număr *frumos* de patru cifre.
13. Într-o clasă, fiecare băiat este prieten cu trei fete și fiecare fată este prietenă cu doi băieți. Dacă în clasă sunt 19 bănci (de câte două locuri) și 31 de elevi sunt pasionați de matematică, câți elevi sunt în clasă?
14. Tatăl, mama și cei trei copii au împreună 82 de ani. Vârstele fiilor sunt reprezentate prin trei numere pare consecutive. Aflați vârsta fiecărui membru al familiei, știind că la nașterea celui de-al doilea copil, fiecare din părinții lui avea de 13 ori vârsta primului copil.
15. Împăratul minciñoșilor, din Împărăția Uriașilor, are înălțimea de 254 cm, iar nasul său are lungimea de 6 cm. După fiecare minciună, lungimea nasului său se triplează și, în același timp, se lungește cu încă 7 cm. Aflați cel mai mic număr de minciuni spuse de împăratul minciñoșilor, astfel încât nasul său să depășească înălțimea sa.



TEMA 22. RĂSPUNSURI ȘI SOLUȚII

1. Descompunând în baza 10, avem
$$\begin{cases} 111d + 2c + 20b + 200a = 1000d + 100a + 10b + c \\ 889d = c + 10b + 100a \Leftrightarrow 889d = \overline{abc} \end{cases}$$

Deci $d = 1, a = 8, b = 8, c = 9$. 2. $\overline{4abc} = \overline{abc}4 + 396 \Rightarrow \overline{abc} = 400$, iar numărul inițial este 4004. 3. Notăm cu a deîmpărțitul și cu b împărțitorul. $98 < a + b < 112$; $a = 3b + 4$; $b > 4$. Răspuns: $a = 76, b = 24$; $a = 79, b = 25$; $a = 82, b = 26$; 3 soluții. 4. 136 de jocuri (Primul joacă cu ceilalți 16; al doilea cu ceilalți 15 etc.). 5. Notăm cu a numărul din câmpul aflat pe linia a doua, coloana întâi.

$18 + a + x = x + 20 + 32 \Rightarrow a = 34, 34 + 20 + 6 = 60, x = 60 - 20 - 32 = 8$. Răspuns: $x = 8$.

18		32
a	20	6
x		

6. a) $6921 - 1623 = 5298$. b) I) Dacă $b = 9$, cum $1 + 2 + 6 = 9$, obținem 6 numere cu proprietatea cerută, întrucât cifrele 1,2,6 se pot schimba între ele în 6 moduri: 1926, 2916, 1962, 2961, 6912, 6921. Avem și situațiile $2 + 3 + 4 = 9$; $1 + 3 + 5 = 9$; în fiecare caz se obțin câte 6 numere. II) Dacă $b = 8$, avem $1 + 2 + 5 = 8$; $1 + 3 + 4 = 8$; de fiecare dată putem obține câte 6 numere.

III) Dacă $b = 7$, avem $1 + 2 + 4 = 7$, adică din nou, 6 numere. IV) Dacă $b = 6$, avem $1 + 2 + 3 = 6$, deci încă 6 numere.

În total obținem 42 de numere, deoarece $7 \times 6 = 42$. 7. Fie \overline{ab} împărțitorul.

I) Dacă resturile ar fi de forma $r, r + 1, r + 2$, am avea $3r = 100$, deci nu am avea soluții.

II) Dacă resturile sunt $\overline{ab} - 2, \overline{ab} - 1, 0$, atunci $2 \cdot \overline{ab} = 106 \Rightarrow \overline{ab} = 53$, iar cel mai mare dintre resturi ar fi 52.

III) Dacă resturile sunt $\overline{ab} - 1, 0, 1$, atunci $\overline{ab} = 103$ și nu convine. 8. Apa din vasul de 8 litri se toarnă în cel de 3 litri, apoi această cantitate este pusă în vasul de 5 litri. Se toarnă din nou apa din vasul de 8 litri în cel de 3 litri, după care această cantitate se toarnă în vasul de 5 litri, unde este spațiu liber pentru 2 litri. În vasul mai mic rămâne un litru. 9. $7 \times 16, 7 \times 17, 7 \times 19, 7 \times 20, 7 \times 22, 7 \times 23, 7 \times 25, 7 \times 26, 7 \times 28$. Răspuns: 9 numere. 10. a) 16, 18, 20; b) Grupăm termenii câte trei: $G1: 1, 3, 5, G2: 6, 8, 10, G3: 11, 13, 15, \dots, Gn: 1 + 5 \cdot (n - 1), 3 + 5 \cdot (n - 1), 5 \cdot n, 100 : 3 = 33 \text{ rest } 1$, deci avem 33 grupe complete și reținem primul număr din grupa 34, adică $1 + 5 \cdot 33 = 166$. 11. a) Ultimul nr. de pe linia 9 este $4 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 180$; b)

$400 = 4 \cdot 100, 1 + 2 + \dots + 13 < 100 < 1 + 2 + \dots + 14$, deci 400 se află pe linia 14. 12. La fiecare 3 m parcurși de vulpe ($3 \times 1 = 3$), ogarul înaintază 4 m ($2 \times 2 = 4$); la fiecare unitate de timp în care se înaintază în acest ritm, distanța dintre cei doi se micșorează cu 1 m ($4 - 3 = 1$); $30 : 1 = 30$ (unități de timp); $30 \times 4 = 120$.

Răspuns: 120 m. 13.
$$\begin{cases} 600 = a + r \\ r = 17x \end{cases} \quad 420 = a + 8x \Rightarrow a = 420 - 8x \text{ unde } x \text{ e nr. de schimburi.}$$

$17x + 420 - 8x = 600 \Rightarrow x = 20, a = 260, r = 340$. 14. Se ordonează urnele și se extrage o bilă din prima urmă, apoi se extrag două bile din a doua, trei bile din a treia, patru bile din a patra și cinci bile din a cincea. Se cântăresc cele $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ bile.

Dacă toate bilele extrase ar avea 150 g, atunci urna cu bile de 9 g ar fi cea de-a șasea.

Dacă toate bilele extrase ar avea 149 g, atunci urna cu bile de 9 g ar fi prima.

Dacă toate bilele extrase ar avea 148 g, atunci urna cu bile de 9 g ar fi cea de-a doua.

Dacă toate bilele extrase ar avea 147 g, atunci urna cu bile de 9 g ar fi cea de-a treia.

Dacă toate bilele extrase ar avea 146 g, atunci urna cu bile de 9 g ar fi cea de-a patra.

Dacă toate bilele extrase ar avea 145 g, atunci urna cu bile de 9 g ar fi cea de-a cincea. 15. Dacă A minte, atunci B spune adevărul, ceea ce înseamnă că C minte, dar se observă că A și B corespund cu observația lui C, care se dovedește adevărată. Se ajunge astfel la o contradicție. Dacă A spune adevărul, atunci B minte, ceea ce înseamnă că C spune adevărul, fapt care se confirmă. În concluzie, A și C spun adevărul, iar B minte.