MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2026

Societatea de Ştiinţe Matematice
din România

# Olimpiada Naţională de Matematică

## Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

## CLASA a IX-a

**Problema 1.** Considerăm numerele reale $a, b, c$ şi ecuaţiile $x^2 + 4ax + (b + c)^2 = 0$, $x^2 + 4bx + (c + a)^2 = 0$, respectiv $x^2 + 4cx + (a + b)^2 = 0$.

a) Arătaţi că cel puţin una dintre cele trei ecuaţii are soluţii reale.

b) Demonstraţi că dacă ecuaţiile admit o soluţie reală comună atunci $a = b = c$.

**Problema 2.** Fie patrulaterul convex $ABCD$, punctul $O$ de intersecţie a diagonalelor sale şi $G_1, G_2, G_3$ centrele de greutate ale triunghiurilor $ABD, ABC$, respectiv $ODC$. Demonstraţi că $O$ este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

*Gazeta Matematică*

**Problema 3.** Determinaţi numerele naturale nenule $n$ pentru care numărul

$$4^{n-1} + n^2 + 11$$

este pătrat perfect.

**Problema 4.** Determinaţi şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale nenule care verifică simultan următoarele două condiţii:

$$(1)\ i + j \text{ divide } a_i + a_j;$$

$$(2)\ a_i + a_j \text{ divide } (i + j)^2,$$

pentru orice $i, j$ numere naturale nenule.

*Timp de lucru 3 ore.*
*Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.*