MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2026

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă pe $\mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \qquad \text{şi} \qquad \int_0^1 x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\,dx\,.$$

a) Demonstraţi că dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de gradul al doilea, având graficul simetric în raport cu dreapta de ecuaţie $x = \dfrac{1}{2}$, atunci

$$\int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,dx = 0\,.$$

b) Demonstraţi că există $c \in (0,1)$, astfel încât $f''(c) = 0$.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar $f : G \longrightarrow G$ un endomorfism al său. Arătaţi că mulţimea $F_f = \{x \in G \,|\, f(x) = x\}$ a punctelor fixe ale endomorfismului f este un subgrup al grupului G.
b) Fie $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 2$, iar p cel mai mic divizor prim al lui n. Demonstraţi că numărul $m = \dfrac{n}{p} + 1$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea că în orice grup finit $(G, \cdot)$ de ordin n, dacă pentru un endomorfism $f : G \to G$ există un automorfism $g : G \to G$ cu proprietatea că mulţimea $A = \{a \in G \,|\, f(a) = g(a)\}$ are cel puţin m elemente, atunci f este un automorfism al grupului G.

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H un subgrup al său cu $H \neq \{e\}$ şi $H \neq G$. Dacă $(xy)^2 = yx$ pentru orice $x, y \in G \setminus H$, demonstraţi că:
a) $x^2 = y^3$, pentru orice $x \in G \setminus H$ şi orice $y \in H$;
b) $Z(G) = \{e\}$, unde $Z(G) = \{z \in G |\, z \cdot g = g \cdot z, \forall g \in G\}$ este *centrul grupului* G, format din toate elementele grupului G care comută cu orice element al grupului G.
c) H este comutativ.

Problema 4. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie continuă şi bijectivă, cu proprietatea că

$$f(x) < x, \quad \text{pentru orice } x \in (0,1).$$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ funcţii}}$ şi $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a) Demonstraţi că pentru orice $x \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
b) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.