Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă, cu proprietatea

$$\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Arătaţi că $\det(A + A^{-1}) = (\mathrm{Tr}(A))^2$, unde $\mathrm{Tr}(A)$ este suma elementelor diagonalei principale a matricei A.

Problema 2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu $x_1, x_2 \in (0, 1)$, pentru care

$$x_{n+2} = x_n^2 \cdot x_{n+1} - x_n^2 + 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 \dots x_n = 0$.

b) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_1 x_2 \dots x_n$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi toate matricele $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = M$, atunci $BA = M$.

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi neconstantă. Considerăm funcţia $g : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(y) = \inf\{x \in [0, 1] \mid f(x) = y\}, \text{ pentru orice } y \in \mathrm{Im}(f),$$

unde $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$. Demonstraţi că funcţia g este continuă dacă şi numai dacă există $a \in (0, 1]$ astfel încât f este strict monotonă pe intervalul $[0, a]$ şi $\mathrm{Im}(f) = f([0, a])$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.