Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a X-a

Problema 1. Se consideră numerele reale $a, b, x, y > 0$, cu $ab \neq 1$, şi c un număr natural nenul astfel încât

$$\log_a \sqrt{x} = \log_b \sqrt{cx + y} = \log_{ab} y.$$

a) Arătaţi că dacă $c = 1$, atunci numărul $\dfrac{y}{x}$ este iraţional.

b) Demonstrați că numărul $\dfrac{y}{x}$ este rațional dacă şi numai dacă c este produsul a două numere naturale nenule consecutive.

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ care satisfac simultan condiţiile

(1) $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$;
(2) $\overline{f(z)} = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$;
(3) $\overline{z}\, f(z) \in (0, \infty)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2 + 5 \cdot 6^x = 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x$.

Problema 4. Pentru orice mulţime finită $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ de numere complexe nenule cu $n \geq 4$ elemente definim mulţimea:

$$B(A) = \left\{ z_i z_j \;\middle|\; 1 \leq i < j \leq n \right\}.$$

Determinați mulțimile A pentru care $A = B(A)$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.